國立高雄師範大學 101 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系三年級

科　目：高等微積分

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。
2.限用藍色或黑色之鋼筆、原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答者不予計分。

1. Suppose that h is integrable and nonnegative on $[1,11]$ with $\int_1^{11} h(x)dx = 3$. Prove that $\int_0^2 h\left(1+3x+3x^2-x^3\right)dx \le 1$. （10%）

2. Show that the function $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ is improperly integrable on $(0,\infty)$. （10%）`

3. Prove that the infinite series $\sum_{k=1}^{\infty} ke^{-k^2}$ converges and estimate its value to an accuracy of 10^{-3}. [Hint: the exponential number $e \approx 2.718281828$.] （15%）

4. Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions defined on $[0,1]$ as follows:

$$f_1(x)=1, \quad \text{and} \quad f_n(x)=\begin{cases} n^2x & 0\le x<1/n \\ 2n-n^2x & 1/n\le x<2/n \\ 0 & 2/n\le x\le 1 \end{cases} \quad \text{for } n\ge 2.$$

Let $f(x)\equiv 0$ on $[0,1]$, show that $f_n \to f$ pointwise on $[0,1]$ but

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \ne 0 = \int_0^1 f(x)dx.$$ （15%）

（背面有題　續翻背面）

系所別：數學系三年級

科　目：高等微積分

5. Show that $\frac{\pi}{4}=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$.　（12%）

6. （1） $D \subseteq R$

（2） $\{f_n : D \to R\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of continuous functions

（3） f_n converges uniformly to $f : D \to R$

Prove that f is also continuous.　（12%）

7. （1） $A \subseteq R^n$

（2） $f =（f_1, f_2, \ldots, f_m）: A \to R^m$

Prove that f is also continuous $\Leftrightarrow$ f_i is continuous for $i=1,2,\ldots,m$　（14%）

8. （1） $a_k \in R$ ， $\forall k \in N$

（2） $|a_k| \le \frac{k^2}{2^k}$ ， $\forall k \in N$

（3） $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ ； $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)$ ， $\forall k \in N$

Show that f_n converges to f on $[-1,1]$ uniformly as $n \to \infty$.　（12%）