國立高雄師範大學九十九學年度轉學生招生考試試題

系所別：數學、物理、光通、電子、軟工等系二年級 （**以鉛筆作答者不予計分**）

科　目：微積分 （第一頁，共二頁）

※注意： 不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

1. 填充題：共七題，每題 5 分，共 35 分。請將答案依題號順序寫在答案紙上，不必寫演算過程。

(a) If $f'(0) = -1$, then $\lim_{h \to 0} \frac{f(3h) - f(-2h)}{h} =$________.

(b) Let $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\sin(\pi x)$, then $f(4) =$________.

(c) $\lim_{x \to 0^+} (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x^2}} =$________.

(d) $\int_0^1 \frac{x^3 e^{x^2}}{(x^2+1)^2}\, dx =$________.

(e) $\int_0^{\ln 10} \int_{e^x}^{10} \frac{1}{\ln y}\, dy\, dx =$________.

(f) Let $D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2 \}$, then $\iint_D (x^2 \tan x + y^5 + 3)\, dA =$________.

(g) The derivative of function $f(x, y)$ at the point $(1,1)$ in the direction toward $(2,1)$ is 3 and in the direction toward $(0,0)$ is $-\sqrt{2}$, then the derivative of f at $(1,1)$ in the direction toward the point $(4,5)$ is ________.

（背面有題　續翻背面）

2. Suppose that f is a continuous function satisfying

$$\boldsymbol{f(x)=2+\int_0^x \frac{f(t)}{(t+2)(t+3)}\,dt} \quad \text{for} \quad \boldsymbol{x\geq 0}$$

Find $\boldsymbol{f(3)}$. （15 分）

3. Evaluate the followings：（15 分）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{2^{\frac{\pi}{n}}+2^{\frac{2\pi}{n}}+\ldots 2^{\frac{n\pi}{n}}\right\}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left\{3x\left[\frac{1}{x}\right]+7x^2\left[\frac{1}{x}\right]\right\}$，where $[\ ]$ means the Gaussian function.

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\ldots\left(1-\sqrt[n]{x}\right)}{\left(1-x\right)^{n-1}}$

4. Let $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0, a_n\neq 0$.（15 分）

（a）Evaluate $\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{1}{f(x)}\right\}^{\frac{1}{\ln x}}$

（b）Prove that $\exists\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，∍ $f(\cos\theta)=a_0+\frac{a_1}{2}+\ldots+\frac{a_n}{n+1}$

5. Prove that $\frac{1}{16}<\sqrt[3]{30}-3<\frac{1}{9}$ by Mean.Value.Theorem（10 分）

6. Find $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$（10 分）