

國立高雄師範大學 103 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系二年級

科目：線性代數

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

2.限用藍色或黑色之鋼筆、原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答者不予計分。

Instruction: Do all problems and show your reasoning. Answers without explanation may receive no credit.

1. Let $W = \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in R^5 \mid a_1 = a_2, a_3 + a_5 = 0\}$.

(a) Show that W is a subspace of R^5 . (5%)

(b) Show that $S = \{(0,0,1,0,-1), (1,1,0,0,0)\}$ is a linearly independent subset of W . (5%)

(c) Extend the set S in part (b) to a basis for W . (5%)

2. Let $T: M_{n \times n}(R) \rightarrow R$ be defined by $T(A) = \text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$, the sum of diagonal entries for a

matrix $A = (a_{ij})$

(a) Show that T is a linear transformation. (5%)

(b) Find the nullity and the rank of T . (10%)

(c) Determine whether T is one-to-one or onto. (5%)

3. Let $M = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}$.

(a) Prove that $\det(M) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$. (10%)

(b) Prove that M is invertible if and only if all a_i are distinct. (5%)

(背面有題 續翻背面)

系所別：數學系二、三年級

科目：線性代數

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= -4 \\ 4. \text{考慮線性方程組} \quad x_1 + x_2 + kx_3 &= 4 \\ -x_1 + kx_2 + x_3 &= k^2 \end{aligned}$$

(a) k 為何值時，該方程組有唯一解。並利用 k 來求出該解。(10%)

(b) k 為何值時，該方程組無解。(5%)

(c) k 為何值時，該方程組有無窮多組解。(5%)

$$5. \text{設 } A_3 \text{ 為一個 } 3 \text{ 階方陣，且 } A_3 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}。$$

(a) 試得出 A_3 的所有特徵值 (eigenvalues) 及所對應的特徵向量 (eigenvectors)。(10%)

(b) 試得出可逆矩陣 (invertible matrix) P 及對角矩陣 (diagonal matrix) D 使得

$$P^{-1}A_3P = D \text{。}(5\%)$$

6. 設 V 與 W 為兩個線性空間，且 T 是一個由線性空間 V 至線性空間 W 的線性變換 (linear transformation)。

(a) 試證明 $\text{Ker}(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$ 為 V 的一個子空間 (subspace)。(5%)

(b) 試證明 $\text{Im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$ 為 W 的一個子空間。(5%)

(c) 試證明 $\text{Ker}(T)$ 的維度 (dimension) 加上 $\text{Im}(T)$ 的維度等於 V 的維度。(5%)