國立高雄師範大學 104 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系二、三年級

科　目：線性代數

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。
2.限用藍色或黑色之鋼筆、原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答者不予計分。

1. 設 $v_1, v_2, v_3, \cdots\cdots, v_{k-1}, v_k$ 在線性空間 V 中是一組線性獨立（linearly independent）的向量，試證明 $v_1, v_2 - v_1, v_3 - v_2, \cdots\cdots, v_{k-1} - v_{k-2}, v_k - v_{k-1}$ 在 V 中亦是一組線性獨立的向量。（10%）

2. 設 A_1 為一個四階實數方陣，且 $A_1 = \begin{bmatrix} 2x & 1+x & 0 & 0 \\ 0 & 2x & 1+x & 0 \\ 0 & 0 & 2x & 1+x \\ 1+x & 0 & 0 & 2x \end{bmatrix}$。

   若 A_1 的行列式等於 0，（即 $\det(A_1)$ 等於 0），試求出 x 的所有可能值。（10%）

3. 設 $T: R^4 \to R^3$ 滿足 $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4, 2x_2 + x_3 - 3x_4, 2x_1 + 7x_3 - x_4)$。
   (1) 試證明 T 是一個線性變換（linear transformation）。（5%）
   (2) 試求出 $Ker(T) = \{v \in R^4 : T(v) = 0\}$ 及 $Ker(T)$ 的一組基底（basis）。（5%）
   (3) 試求出 $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) : v \in R^4\}$ 及 $\mathrm{Im}(T)$ 的一組基底。（5%）

4.設 $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$，試求出 H 的一組正交基底（orthogonal basis）。（15%）

5. Let N be a nilpotent $n \times n$ matrix (i.e., $N^k = 0$ for some k).
   Show that $T: M_{n\times m}(R) \to M_{n\times m}(R)$ is an isomorphism if $T(A) = A - NA$. （10%）

（背面有題　續翻背面）

系所別：數學系二、三年級

科　目：線性代數

6. Let $A \in M_{m\times n}(R)$.

(1) Show that if $A^T Ax = 0$, then $Ax = 0, \forall x \in R^n$.（5%）

(2) Show that $\text{rank}(A^T A) = \text{rank}(A)$.（10%）

7. Let $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Use the Cayley-Hamilton theorem to compute A^{-1}.（10%）

8. Consider $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$, where one of $a, c \neq 0$. Find an orthogonal matrix P and a diagonal matrix D such that $P^{-1}AP = D$.（15%）