

國立高雄師範大學 106 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系 數學組、應數組 二、三年級

科 目：線性代數

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

2.限用藍色或黑色之鋼筆、原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答者不予計分。

1. 若 u 為一個向量，試證明 $u \cdot u = 0$ 若且唯若 $u = 0$ 。(10%)

2. 若 u 與 v 為兩個線性獨立(linear independent) 的向量，試證明 $u + v$ 與 $u - v$ 亦為線性獨立。(10%)

3. 設

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

為一個四階方陣。

(a) 試求出 A 的行列式值(determinant)， $\det A$ 。(5%)

(b) 試求出 A 的反矩陣(inverse matrix)， A^{-1} 。(5%)

(c) 試求解下列線性聯立方程組。(5%)

$$\begin{cases} x + z + w = 8 \\ x + 3y + w = 1 \\ x + 2y + 2z + 2w = 9 \\ x + y + z + w = 6 \end{cases}$$

4. 設 $H_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$ 且

$H_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ 。

(a) 試證明 $H_1 \cap H_2$ 是 \mathbb{R}^4 的線性子空間。(10%)

(b) 試求出 $H_1 \cap H_2$ 的一組基底(basis)。(5%)

(背面有題 續翻背面)

系所別：數學系 數學組、應數組 二、三年級

科 目：線性代數

5. Let $L_1 : V \rightarrow W$ and $L_2 : W \rightarrow X$ be two linear transformations. (15%)
- (a) Show that $\ker(L_1) \subseteq \ker(L_2 \circ L_1)$.
 - (b) Show that $\text{range}(L_2 \circ L_1) \subseteq \text{range}(L_2)$.
 - (c) If V is finite dimensional, prove that $\dim(\text{range}(L_2 \circ L_1)) \leq \dim(\text{range}(L_1))$.

6. Let P_n be the set of polynomials of degree $\leq n$, with real coefficients. Show that $L : P_n \rightarrow P_n$ given by $L(p) = p + p'$ is an isomorphism. (15%)

7. Solve the following matrix equation (20%)

$$X^2 + 6X + 9I = \begin{bmatrix} -5 & 18 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

where I is the 2×2 identity matrix.