國立高雄師範大學 107 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系二、三年級

科　目：線性代數

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。
2.限用藍色或黑色之鋼筆、原子筆作答，以鉛筆或其他顏色作答者不予計分。

1. For each statement below, determine whether the statement is true or false. **Please give a rigorous proof if it is true, and give a counterexample if it is false.**

   (a) Let $A \in M_n(\mathbf{R})$. If $\lambda \in \mathbf{R}$ is an eigenvalue of A, then $\det(A - \lambda I_n) = 0$.（10%）

   (b) Let A and B be 9×9 (square) matrices. If $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) = 13$, then the matrix AB is not invertible.（15%）

2. Let $T : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ be defined by

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3c & 2b-5a \\ -4d & a+2c \end{bmatrix}$$

   and let $B = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

   (a) Show that B is an ordered basis for $M_2(\mathbf{R})$.（7%）

   (b) Show that T is linear.（8%）

   (c) Find $[T]_B$.（10%）

（背面有題　續翻背面）

系所別：數學系二、三年級

科　目：線性代數

3. Let W be the solution set to $Ax = 0$, where

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -15 & 2 & 8 \\ -3 & 9 & -1 & -5 \\ 2 & -6 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Show that W is a subspace of R^4.（10%）

(b) Find a basis for W.（10%）

(c) Compute $\dim(W) + \operatorname{rank}(A)$.（5%）

4. Suppose that $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = \lambda_3 = 3$ are eigenvalues of a 3×3 real symmetric matrix A. Let $[-1,0,1]^T$ and $[1,-2,1]^T$ be two eigenvectors corresponding to the eigenvalue $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

(a) Find an eigenvector corresponding to the eigenvalue $\lambda_1 = 6$.（5%）

(b) Find the matrix A.（10%）

5. Let $x, y \in V$, a real inner product space. Prove

$$< x, y >= \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2).$$

（10%）