國立高雄師範大學 108 學年度學士班轉學生招生考試試題

系所別：數學系二、三年級

科　目：線性代數（全一頁）

※注意：1.不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。
2.限用藍色或黑色筆作答，以其他顏色作答者不予計分。

1. 設$T: R^n \to R^n$是一個線性變換（linear transformation）。

(a)設U是R^n的一個線性子空間（linear subspace），試證明$T(U)$是R^n的線性子空間。（5%）

(b)試證明T是一對一（one-to-one）若且唯若T是映成(onto)。（10%）

2. 試證明不存在三階實係數方陣A使得$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$。（10%）

3. 設$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$為一個三階實係數方陣。

(a)試得出H的特徵多項式。（5%）

(b)試得出H的所有特徵值（eigenvalues）及所對應的特徵向量（eigenvectors）。（15%）

(c)試得出可逆矩陣（invertible matrix）P及對角矩陣（diagonal matrix）D使得

$P^{-1}HP = D$。（5%）

4. Find a least-squares polynomial for the points $(-1,-4), (0,-2), (2,-2)$, and $(3,-5)$.（15%）

5. Let $A \in M_{m\times n}(R)$.

(a) Show that if $A^T Ax = 0$, then $Ax = 0, \forall x \in R^n$.（5%）

(b) Show that $\operatorname{rank}(A^T A) = \operatorname{rank}(A)$.（10%）

6. Consider the subspace W of P_4 consisting of all polynomials of the form

$ax^4 + bx^3 + cx^2$, for some $a,b,c \in R$.（20%）

(a) Prove that $L: W \to P_3$ given by $L(p) = p' + p''$ is one-to-one.

(b) Is L an isomorphism from W to P_3？ Why？