國立高雄師範大學九十九學年度轉學生招生考試試題

系所別：數學系二年級　　　　　　　　　　**（以鉛筆作答者不予計分）**

科　目：線性代數（第一頁，共二頁）

※注意： 不必抄題，作答時請將試題題號及答案依照順序寫在答案卷上，
於本試題上作答者，不予計分。

1. (1) Let $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 10 & 2 \\ 6 & 3 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$, find the rank of A.

(2) Find all solutions to the system $\begin{cases} 2x_2+4x_3+2x_4+2x_5=0 \\ 4x_1+4x_2+4x_3+8x_4=0 \\ 8x_1+2x_2+10x_4+2x_5=0 \\ 6x_1+3x_2+2x_3+9x_4+x_5=0 \end{cases}$

(3) Find a basis of span{(0,4,8,6), (2,4,2,3), (4,4,0,2), (2,8,10,9),(2,0,2,1)}.　　（24%）

2. Let $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, find $\det(A)$ and A^{-1}.　　（12%）

3. Let V be an inner product space over $\mathbb{C}$, for $x,y\in V, c\in\mathbb{C}$, define $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$, show that
(a) $\langle x,cy\rangle=\bar{c}\langle x,y\rangle$　(b) $\langle x,0\rangle=0$　(c) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$　(d) If $\langle x,z\rangle=\langle y,z\rangle, \forall z\in V$, then $x=y$.
（14%）

（背面有題　續翻背面）

系所別：數學系二年級　　　　　　　　　　　　　　　**（以鉛筆作答者不予計分）**

科　目：線性代數（第二頁，共二頁）

4. Let A and B be subspaces of a vector space $\boldsymbol{V}$.

(a) Is $A+B$ a subspace of V? Prove or give a counterexample.　（5%）

(b) Is $A \cup B$ a subspace of V? Prove or give a counterexample.　（5%）

5. Let $H = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$. If $HH^t = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$, find $2a_1^2 - 3a_2^2 + a_3^2 - 5a_1a_2 + 4a_2a_3 - 3a_3a_1$.　（10%）

6. Let V and W be vector spaces over a field F with zero vectors θ_V and θ_W, respectively. Suppose that $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ is a basis for V and $T: V \to W$ is linear and one-to-one. Show that $\{T(v_1), T(v_2), \cdots, T(v_n)\}$ is a basis for $R(T)$.　（10%）

7. Let $A \in M_n(\mathbb{R})$. Show that A is invertible $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.　（10%）

8. Let $A = \begin{bmatrix} 9 & -2 & -1 \\ -3 & 10 & -1 \\ -3 & -2 & 11 \end{bmatrix}$. Find an invertible matrix P and a diagonal matrix D such that

$P^{-1}AP = D$.　（10%）