

國立高雄師範大學 115 學年度碩士班招生考試試題

系所別：數學系

科 目：基礎數學（全一頁）

※注意：1.作答時請將試題題號及答案依序寫在答案卷上，於本試題上作答者，不予計分。

2.答案卷限用藍、黑色筆作答，以其他顏色作答之部分，該題不予計分。

1. (10%) Calculate

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n).$$

2. (10%) Find the integral

$$\int \cos(\sqrt[3]{x}) dx.$$

3. (10%) Let $f(x) = \cos(\sqrt{x})$. Find $f^{(100)}(0)$.

4. (10%) Find a function f and a positive number A such that the following equation holds:

$$6 + \int_A^x \frac{f(t)}{t^3} dt = 2\sqrt{x}, \quad x > 0.$$

5. (10%) Find the extreme values of

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2x + 3$$

subject to the constraint $x^2 + y^2 \leq 10$.

6. (15%) 已知線性映射 $T: V \rightarrow V$ 滿足 $T^3 = T$ ，證明 $T^2 = T$ 或找出反例並說明理由。

7. (15%) 已知 A 是一個 $\text{rank} = 2$ 的 3×2 矩陣。證明 $A^T A$ 是 non-singular (可逆)。

8. (20%) 已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ y & x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$ 相似而且 $z \neq 0, 1$ 。求 x, y, z 的值。