

# 脈衝電漿推力器磁流體在震波管的數值解

江仲驊\*

## 摘要

電漿推進的數值模擬是脈衝電漿推力器(PPT)基本研究的基礎。本研究通過理論推導和數值計算，發展了脈衝電漿推力器的磁流體流場模式。學理上基於馬克士威方程組(Maxwell's equations)和勞侖茲力(Lorentz force)方程式，結合流體守恆方程式成為理想化磁流體動力學(Magnetohydrodynamics, MHD)一維數學模型。本研究將對此 MHD 方程式組應用於震波管所形成的黎曼問題(Riemann problem)進行數值解，本文採取三種數值方法做比較。三種方法雖然都得到相同的數值解，但是 Lax-Wendroff 和 MacCormack methods 不論所選擇的人工黏滯係數(artificial viscosity)大小均無法解決在不連續區數值振盪的問題。在考慮物理模式中波傳遞的加成作用，第三種數值方法採用 Roe's Riemann solver，先對 MHD 方程組進行了特徵分析，推導其特徵矩陣，雖然過程比較複雜，但其解可以避免不連續區數值振盪的問題。本研究也採用高準確度方法解析不連續區域變數的變化。在時間積分方面採取四階 Runge-Kutta 方法積分，所得到數值結果與文獻上的結果符合。擴散波(rarefaction fan)，接觸不連續(contact discontinuity)波，與震波(shock wave)都能得到清楚的解析。在磁流體力場中，壓力在接觸不連續的地方因為受到磁場的影響也呈現不連續的情況，必須定義——全壓包括磁場壓力如此定義的全壓跨過接觸不連續的是連續分布的。

**關鍵詞：**脈衝電漿體推力器、磁流體動力學、一維 MHD 數值解法、黎曼問題

投稿日期：2019/01/28；接受日期：2019/04/24

---

\* 義守大學機械與自動化工程學系副教授

# Numerical Solutions of the Shock-Tube Problem for the Plasma Flow in Pulsed Plasma Thruster

Chung-hua Chiang\*

## Abstract

Numerical simulation of the plasma propulsion is essential to the Pulsed Plasma Thruster (PPT) fundamental research. By way of coupling the effects among the electric field, magnetic field and flow field in the PPT, a one-dimensional time-dependent model based magnetohydrodynamic (MHD) for PPT has been developed and solved numerically. The system of idealized MHD equations is a conservation system of hydrodynamics and Maxwell's equations with Lorentz force as the driving force of the plasma flow. The shock-tube problem has been used to test numerical stabilities of employed numerical methods. In this research the Riemann problem for a quasilinear hyperbolic system of equations governing the one-dimensional unsteady flow of an inviscid and perfectly conducting compressible fluid, subjected to a transverse magnetic field, is solved numerically. Three different numerical schemes have been employed in this study. The Lax-Wendroff and MacCormack were originally employed for the space discretization of the system of nonlinear equations. Unfortunately, the results showed oscillations at discontinuities even with addition of artificial viscosities for these two methods. For numerical simulations to be effective, a high-order accurate solver that captures MHD shocks monotonically and works reliably for strong magnetic fields is needed. A characteristics-based scheme of Roe's Riemann solver for the MHD equations, with flux limiters to improve spatial accuracy has been developed successfully. The unsteady terms are discretized using fourth order Runge-Kutta integration. The results are compared with other references for validation and show a good agreement with the existed literature. Rarefaction fan, contact discontinuity and a moving shock have been resolved clearly. It has been observed that in contrast to the gasdynamic case, the pressure varies across the contact discontinuity. A full pressure has been introduced to remove the spike caused by the influence of the magnetic field and is continuous across the contact discontinuity.

**Keywords:** pulsed plasma thruster, MHD, Riemann problem, Roe's Riemann solver

**Submitted: 2019/01/28 ; Accepted: 2019/04/24**

---

\* Associate professor, Department of Mechanical and Automation Engineering, I-Shou University, Kaohsiung, Taiwan

## Nomenclature

|           |                                         |
|-----------|-----------------------------------------|
| $\vec{B}$ | : Magnetic field                        |
| $\vec{E}$ | : Electric field                        |
| F         | : Conservation flux vector              |
| H         | : Enthalpy                              |
| J         | : Current density vector                |
| e         | : Specific internal energy              |
| L         | : Left Eigenvector                      |
| p         | : Pressure                              |
| R         | : Right Eigenvector                     |
| T         | : Temperature                           |
| $\vec{v}$ | : Velocity vector                       |
| $V_f$     | : Speed of the Alfvén wave              |
| u         | : Velocity component in x-direction     |
| U         | : Conservation variables                |
| $\rho$    | : Density                               |
| $\gamma$  | : Ratio of specific heats of the plasma |
| $\Lambda$ | : Diagonal matrix of eigenvalues        |
| $\mu_0$   | : Magnetic permeability of free space   |

## 壹、前言

近年來，微小衛星以其重量輕、體積小、成本低、研製週期短等特點，得到了迅速發展，廣泛應用於通信、遙感、軍事偵察等領域。也代表了航空載具小型化的趨勢，成為衛星工程發展的重要趨勢。對於採用化學推進系統的航太載具，推進劑是其主要的重量負擔。由火箭方程式可知，在降低推進劑重量的同時要獲得高的推進性能，必須提高推進系統的噴氣速度。而作為常規的化學推進系統，其噴氣速度存在一個理論極限，最為理想的情況是推進劑本身攜帶的化學能完全轉換成噴氣動能，而這個化學能是有限的。為了避開化學推進系統中推進劑化學能受限這一問題，人們引入了電推進(electric propulsion)概念，並在廣泛地探索其它新概念推進技術並以其優越的性能廣泛應用於深太空飛行任務。

電推進技術就是利用電能產生並加速帶電粒子形成高速射流而產生推力的技術。一般而言，電推進系統的噴氣速度比化學推進系統高出一個數量級。對於一定的空間推進任務，採用電推進系統比採用化學推進系統可以大大節省推進劑，這對於航太載具設計是非常有益的。其中電磁式推力器是利用電能使推進劑電離成電漿，電漿在電場和感應磁場或外加磁場相互作用產生的電磁力的作用下，加速噴出產生推力。主要包括磁電漿動力學推力器、霍爾效應推力器、脈衝電漿推力器等。

其中脈衝電漿推力器(Pulsed Plasma Thruster, PPT) [1] [2]更是一種比衝高、功耗低、結構簡單、重量輕的電磁推力器，可應用於微小衛星的位置保持、姿態控制等任務。PPT 成為當前國際上(美國、俄羅斯、日本等國)電推進研究的熱點。對於許多微型航天器的推進任務，包括軌

道轉移、位置保持、阻力補償、精確編隊飛行以及姿態控制等來說，是一個最主要的候選者。隨著微小衛星技術及其應用在我國將開始發展，必將產生對應用於微小衛星的在軌推進技術廣泛需求，因而研製高性能脈衝電漿推力器具有十分重要的意義。

電漿推力器內彈道的研究是困難的。一方面由於其中的過程(processes)同時存在著具有多種不同時間尺度和空間尺度，各過程之間存在著複雜而劇烈的相互耦合關係，很多過程的內在機制尚未瞭解清楚，即使對已經認識到的各種過程，由於相互耦合關係太複雜而難以分析。另一方面，由於實際運行的物理環境相當苛刻，而電、磁、熱、光的干擾強烈，使實驗測量非常困難。在這種情況下，理論分析與數值模擬對物理機制的了解顯得特別重要。

PPT 工作過程的模擬，主要在於加速通道內的電漿流動進行磁流體動力學建模和分析。為此需要開展非穩態的電漿流的研究、理論建模與分析。電漿流動的方程組，需要將流體力學守恆方程式和馬克斯威爾方程組(Maxwell's equations)結合起來，建立磁流體力學方程組。過去的數值模擬有可使用商用軟體的 MHD code 例如 MACHZ [3]，成本貴也不容易使用。本研究為建立本土研發能力採用自行開發程式的方式，先行開發一維 MHD code。

本研究將先行採用理論分析，假設電漿電中性和局部熱力學平衡的基礎上，忽略霍爾效應、電漿軸向熱傳導和粘性作用，建立了基於磁流體動力學的工作過程一維非穩態數學模型。發展程式數值解出此守恆電漿流場方程組，來獲得了推力器電漿流場與電磁場分佈情況。

## 貳、電漿流動方程式組的推導

本研究描述電漿流動的方程組的推導可以使用宏觀描述(macroscopic description)，將電漿流動視為流體的流動。因為電漿構成的流體介質中，存在大量的帶電粒子，它是一種導電性能良好的流體，它在電磁場中的運動由磁場感應產生電流，從而在介質的內部感生出電磁場，引起原有的電磁場發生改變。所以電漿在電磁場中的運動，既要遵守流體力學的運動規律，又要遵守電磁場的基本原則。一方面，電磁場的存在又對運動的導電電漿介質產生洛倫茲力，使得介質的運動中產生體積力的源項。所以在流體力學方程組中必須加入電磁力的作用，另一方面，在描述電磁場的方程組中必須加入電漿運動產生的電場項。所以本研究的電漿流動的方程組需要將流體力學守恆方程式和馬克斯威爾方程組結合起來，建立磁流體力學方程組。但未經簡化完備的 MHD 方程式組是一個混合了雙曲線型和拋物線型特徵的複雜系統，使得方程組的特徵變得異常複雜，許多計算流體力學中的數值差分方法無法直接應用求解。為此，先假定電漿流動過程為無粘滯性、理想導電即電導率 $\sigma$ 為無窮大，同時忽略電漿的軸向熱傳導，則方程組可以化為理想 MHD 方程式組，才可以計算流體力學(CFD)中的守恆向量方程式組來得解 [4] [5]。

假設加速通道中，電漿處於局部熱力學平衡狀態，且電漿為稠密氣體，均勻電漿的流動可以用一般流體力學連續體一樣的觀念來定義宏觀的變數如溫度、壓力、密度、能量、速度及相關熱力性質。

本研究電漿流動模型基本假設如下：

1. 電漿處於局部熱力學平衡狀態，熱力學和輸運係數(transport coefficients)值使用平衡狀態

的熱力性質(一般為溫度及壓力的函數)。

2. 電漿流動符合理想氣體狀態方程式。
3. 電漿流動為非穩定可壓縮流、不具粘滯性，導率  $\sigma$  為無窮大。
4. 忽略重力、霍爾效應、電漿軸向熱傳導的影響。

因此，電漿的運動同普通流體一樣遵守流體力學三大守恆定律；亦即質量守恆、動量守恆和能量守恆。因此其基本的流動方程也包括連續方程式、運動方程式和能量方程式。

## 一、統御方程式

連續方程式：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

在帶電流體的運動中，基於動量守恆的運動方程比一般流體的運動方程增加了運動於電磁場的帶電粒子所感受到的作用力(洛侖茲力)，動量守恆方程式如下：

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u + p)}{\partial x} = J \times B_y \quad (2)$$

其中， $p$  為電漿氣體壓力， $J = qu$  為電流密度，假設磁場是在流場的垂直方向， $B_y$  為  $y$  方向的磁場感應強度(假設其它方向的磁感應強度均為零)， $J \times B_y$  即為洛侖茲力。

能量的守恆方程式如下：

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u e)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ u \left( p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \right) \right] = 0 \quad (3)$$

其中， $e$  為單位質量的電漿比內能(specific internal energy)。方程左邊前兩項表示單位體積內能量內能和動能的變化率，第三項代表壓力及磁力做功率。

上述守恆方程組必須結合馬克斯威爾方程組中電流密度  $J$  與磁場感應強度  $B_y$  的關係式等才能形成一個完備(well posed)的方程式組。基本的馬克斯威爾方程組如下所示：

法拉第定律(Faraday's law)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = \text{curl}(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (4)$$

安培定律(Ampère's circuital law)

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J \quad (5)$$

歐姆定律(Ohm's law)

$$\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B} = 0 \quad (6)$$

磁場散度限制條件(The magnetic divergence constraint)

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7)$$

將上述馬克斯威爾方程組應用於一維電漿流場可得到下列關係式表示為

$$\vec{B} = -B_y j \quad (8)$$

一維  $J$  和  $B_y$  之間為

$$J = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (9)$$

一維法拉第一馬克士威方程式可表示成

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial x} \quad (10)$$

一維電場表示為純量函數

$$E = -uB_y \quad (11)$$

代入法拉第一馬克士威方程式可得到

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial(uB_y)}{\partial x} \quad (12)$$

假設電漿符合理想氣體狀態方程式，則  $p = \rho RT$ ，電漿比內能  $e$  可表示為

$$e = \frac{p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{u^2}{2} + \frac{B_y^2}{2\rho\mu_0} \quad (13)$$

其中  $\gamma$  為電漿比熱比

綜合流體守恆定律及馬克斯威爾方程組電流密度  $J$  與磁場感應強度  $B_y$  的關係式，則可獲得一個封閉的一維電漿流動方程式組，即 1D MHD 方程式組，可表示成守恆向量方程式組，

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

$U$  和  $F$  分別為守恆變數及通量向量。

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ B_y \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u u + p + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \\ (\rho e + p + \frac{B_y^2}{2\mu_0})u \\ uB_y \end{pmatrix} \quad (15)$$

## 參、數值解法

磁場作用下的一維震波管問題是檢驗數值方法應用於流場的經典問題。磁震波管是一個被分作左右兩個部分的等截面積的管，包括左右邊兩邊的熱物理條件不同中間存在不連續，MHD 又加上一個磁場作用在該流場上。黎曼問題就是在起始狀態時某個界面左右兩邊如壓力，密度，速度不相等，亦即存在一個不連續的跳躍情況，此流場在中間薄膜打破後隨時間演變會發展成一系列的從左向右的包括連續的或不連續的三種波型：稀疏扇形波(rarefaction fan)，接觸不連續(contact discontinuity)，及震波(shock wave)。黎曼問題在歐拉方程式上相當於氣動力學的震波管問題，此問題應用於氣動力學的守恆定律在正解及數值解都有廣泛的討論 [6]。一般來說黎曼問題的理論解不能表示為解析函數，只能疊代方式求解，也很複雜。反而使用電腦計算的數值解比較簡單。在本研究上的磁流體場黎曼問題更需考慮磁場變化的方程式，及磁場與流場的偶合作用，將使正解更困難獲得。因此本研究將採取數值方法求解。

### 一、空間離散方法

本研究首先使用傳統的 Lax Wendroff 及 MacCormack [7]方法求解，先了解流場的形式。這兩個方法仍普遍使用與工業計算的軟體，這兩種方法都採取先預測再修正兩步階的方式，按照下列的公式。

#### (一) Lax-Wendroff Scheme

預測(Predictor step)

$$\tilde{U}_{j+1/2} = \frac{U_j^n + U_{j+1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n)] \quad (16)$$

修正(Corrector step)

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(\tilde{U}_{j+1/2}) - F(\tilde{U}_{j-\frac{1}{2}})] \quad (17)$$

#### (二) MacCormack Scheme

預測(Predictor step)

$$\tilde{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F(U_{j+1}^n) - F(U_j^n)] \quad (18)$$

修正(Corrector step)

$$U_j^{n+1} = \frac{U_j^n + \tilde{U}_j}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [F(\tilde{U}_j) - F(\tilde{U}_{j-1})] \quad (19)$$

一般而言這兩種空間離散方法均為二階精確度，在不連續區會發生數值振盪的現象，所以

必須加入人工的數值黏滯係數增加人為消耗量(artificial dissipation) [8]來抑制振盪幅度，原來的守恆方程式變成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} - \Delta x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left( D(x) \frac{\partial U}{\partial x} \right) = 0 \quad (20)$$

本研究利用最簡單的常數黏滯係  $D(x)=D$  併入修正後的通量向量(modified flux) $F^*(U)$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F^*(U)}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

在預測步階使用後差分法(backward difference)

$$F^*(U_j) = F(U_j) - (D\Delta x)(U_j - U_{j-1}) \quad (22)$$

在修正步階使用前差分法(forward difference)

$$F^*(\tilde{U}_j) = F(\tilde{U}_j) - (D\Delta x)(\tilde{U}_{j+1} - \tilde{U}_j) \quad (23)$$

### (三) Roe's Riemann solver

第三個方法將對此 MHD 方程式組進行了特徵分析，推導其特徵矩陣，以 Roe's Riemann solver [9]對 MHD 方程組進行求解。

首先將非線性統御方程式表示成線性系統方程組如下

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (24)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho e \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}, A = \frac{\partial F}{\partial U} \quad (25)$$

經過適當的微分運算可得到 Jacobin Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial u_1} - u^2 & \frac{\partial p}{\partial u_2} + 2u & \frac{\partial p}{\partial u_3} & \frac{\partial p}{\partial u_4} + \frac{B_y}{\mu_0} \\ u \frac{\partial p}{\partial u_1} - u \left( \frac{p}{\rho} + e + \frac{B_y^2}{2\rho\mu_0} \right) & u \frac{\partial p}{\partial u_2} + \frac{p}{\rho} + e + \frac{B_y^2}{2\rho\mu_0} & u \frac{\partial p}{\partial u_3} + u & u \frac{\partial p}{\partial u_4} + \frac{uB_y}{\mu_0} \\ -\frac{uB_y}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & 0 & u \end{pmatrix} \quad (26)$$

並求 A 矩陣的特徵值  $\lambda_{1,2}=u$ ， $\lambda_{3,4}=u \pm V_f$

$$v_f = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho} + \frac{B_y^2}{\rho \mu_0}} = \sqrt{\gamma(H - e) - \frac{(\gamma - 2)B_y^2}{2\rho \mu_0}} \quad (27)$$

為 Alfvén wave 的速度。H 為焓，以下列狀態方程式表示之

$$H = \frac{p}{\rho} + e + \frac{B_y^2}{2\rho \mu_0} \quad (28)$$

特徵值有重複根因此系統並非嚴厲雙曲線特性(strictly hyperbolic).

先求右邊特徵值向量(Right Eigenvector)

$$AR = RA, \quad (29)$$

A 為特徵值對角矩陣

將每一特徵值的右邊特徵值向量轉置為 R 的行向量。

經過運算，R 為

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ u & 0 & (u + v_f) & (u - v_f) \\ \frac{u^2}{2} & \frac{(\gamma - 2)B_y}{(\gamma - 1)\mu_0} & H + uv_f & H - uv_f \\ 0 & 1 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} \end{pmatrix} \quad (30)$$

再求左邊特徵值向量(Left Eigenvector)

$$LA = AL \quad (31)$$

將每一特徵值的左邊特徵值向量轉置為 L 的列向量，經過運算 L 為

$$L = \frac{1}{v_f^2} \begin{pmatrix} v_f^2 - \frac{(\gamma - 1)u^2}{2} & u(\gamma - 1) & -(\gamma - 1) & \frac{(\gamma - 2)B_y}{\mu_0} \\ -\frac{(\gamma - 1)u^2 B_y}{2\rho} & \frac{(\gamma - 1)u B_y}{\rho} & -\frac{(\gamma - 1)B_y}{\rho} & v_f^2 + \frac{(\gamma - 2)B_y^2}{\rho \mu_0} \\ \frac{(\gamma - 1)u^2}{4} - \frac{uv_f}{2} & \frac{1}{2}v_f - \frac{(\gamma - 1)u}{2} & \frac{(\gamma - 1)}{2} & -\frac{(\gamma - 2)B_y}{2\mu_0} \\ \frac{(\gamma - 1)u^2}{4} + \frac{uv_f}{2} & -\frac{1}{2}v_f - \frac{(\gamma - 1)u}{2} & \frac{(\gamma - 1)}{2} & -\frac{(\gamma - 2)B_y}{2\mu_0} \end{pmatrix} \quad (32)$$

可證  $RL = I$ ，亦即 R 與 L 互為反矩陣關係

將 A 矩陣作對角化的轉換，使新線性系統具真正雙曲線特性(truly hyperbolic)

$$A_{j+1/2} = R_{j+1/2} \Lambda_{j+1/2} R_{j+1/2}^{-1} \quad (33)$$

$$|A_{j+1/2}| = R_{j+1/2} |\Lambda_{j+1/2}| R_{j+1/2}^{-1}, \quad |\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_i|) \quad (34)$$

計算 A 矩陣必須使用 Roe 平均值(Roe's average)如下所推導而得

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\sqrt{\rho_R} u_R + \sqrt{\rho_L} u_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \\ \bar{H} &= \frac{\sqrt{\rho_R} H_R + \sqrt{\rho_L} H_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \\ \bar{B}_y &= \frac{\sqrt{\rho_R} B_{y,L} + \sqrt{\rho_L} B_{y,R}}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\bar{\rho} = \sqrt{\rho_R \rho_L}$$

$$\frac{\bar{B}_y}{\bar{\rho}} = \frac{\sqrt{\rho_R} \left( \frac{B_{y,R}}{\rho_R} \right) + \sqrt{\rho_L} \left( \frac{B_{y,L}}{\rho_L} \right)}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}$$

若使用 Roe 的上風法(upwind scheme, Roe's approximate solver)在控制體積邊界的通量為

$$\phi_{j+1/2} = \frac{1}{2} \{F(U_j) + F(U_{j+1})\} - \frac{1}{2} |A_{j+1/2}| (U_{j+1} - U_j) \quad (36)$$

新時間變數值可解得

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\phi_{j+1}^n - \phi_j^n) \quad (37)$$

此為一階精確度的方法，如要增加精確度可使用 MUSCL(monotone upwind schemes for conservation laws) [10]方法。假設空間離散項是一階精確度的，經離散後成為常分方程式表示如下

$$\frac{dU_j}{dt} = \frac{1}{\Delta x} (\phi_{j+1/2} - \phi_{j-1/2}) = 0 \quad (38)$$

控制體積邊界的通量為左右兩點的函數

$$\phi_{j+1/2} = \phi(U_j, U_{j+1}) \quad (39)$$

但此通量函數可以藉由左右狀態向外差，增加格點數而增加精確度

$$\phi_{j+1/2} = \phi(U_{j+1/2}^L, U_{j+1/2}^R) \quad (40)$$

但為了避免數值震盪必須使用斜率限制函數 slope limiter functions 在每一個狀態變數上，例如

$$\begin{aligned} \rho_{j+1/2}^L &= \rho_j + \frac{1}{2} \psi(r_j)(\rho_{j+1} - \rho_j) \\ \rho_{j+1/2}^R &= \rho_{j+1} + \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{r_{j+1}}\right)(\rho_j - \rho_{j+1}) \\ r_j &= \frac{\rho_j - \rho_{j-1}}{\rho_{j+1} - \rho_j} \end{aligned} \quad (41)$$

$\psi(r_j)$  為斜率限制函數。

本計算使用 van Albada flux limiter. [11]

## 二、時間離散方法

空間項離散後的常微分系統方程式可以表示為

$$\frac{dU}{dt} + R(U) = 0 \quad (42)$$

為提高精確度，四階精確度 Runge-Kutta method 做時間離散的方式 [12]

$$\begin{aligned} U^{(0)} &= U^n \\ U^{(1)} &= U^{(0)} - \alpha_1 \Delta t R(U^{(0)}), \\ U^{(2)} &= U^{(0)} - \alpha_2 \Delta t R(U^{(1)}), \\ U^{(3)} &= U^{(0)} - \alpha_3 \Delta t R(U^{(2)}), \\ U^{n+1} &= U^{(0)} - \Delta t R(U^{(3)}), \end{aligned} \quad (43)$$

典型常用的係數為  $\alpha_1 = \frac{1}{4}$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha_3 = \frac{1}{2}$ ，使四階 Runge-Kutta method 達到最大的準確度。

## 肆、結果與討論

本文中用 [13]的計算案例以驗證所導出數值法公式。震波管左右兩邊初始條件如下

$$\rho_L = 1.0, \rho_R = 0.125$$

$$P_L = 1.0, P_R = 0.1$$

$$u_L = 0, u_R = 0$$

$$B_{y,L} = 1.0, B_{y,R} = -1$$

在流體動力學方面的數值是與 Sok's 震波管資料符合的 [14]。在左邊界  $i = 1$  和右邊界  $i = l$  處的邊界條件採用穿透邊界(transmissive boundaries)在一維流場使用簡單的零階外插獲得

$$U_{i=1} = U_{i=2}$$

$$U_{i=l} = U_{i=l-1} \quad (44)$$

計算採用 800 個格點，空間步長  $\Delta x$  為 1，中心點在  $x$  等於 400 處。比熱比  $\gamma = 2$ ， $\mu_0 = 1$ ，時間步階大小  $\Delta t$  由 CFL 條件所決定。在每一點上必須滿足

$$\max_i \{ |\lambda_i| \frac{\Delta t}{\Delta x} \} \leq 1 \quad (45)$$

$\lambda_i$  是 Jacobin Matrix  $\partial F / \partial U$  的特徵值(Eigenvalue)也是特徵波(Characteristic waves)傳播的速度( $\frac{dx}{dt} = \lambda$ )。

計算到時間等於 80 可從圖 1 密度分佈看到三種不同波型由左至右，可看見疏散波(約在  $x=240-330$  之間)往左移傳播，接觸不連續(約在  $x=440$  處)及震波(約在  $x=680$  處)兩者往右傳播。圖 2，圖 3，圖 4 分別顯示出速度、壓力及磁場的公佈。在氣動力學歐拉方程式中接觸不連續只是起始條件的一個介面，壓力及法線方向速度是連續的，只有密度是不連續分布。但在磁流體力場中，壓力在接觸不連續的地方因為受到磁場的影響也呈現不連續的情況，變成一慢的複合波(slow compound wave)，尖端突出不連續的現象是因為 MHD 方程式 nonconvexity 的特性所引起。定義一全壓 full pressure 包括磁場壓力(magnetic pressure force)

$$P_b = P + \frac{B_y^2}{2\mu_0} \quad (46)$$

圖 5 顯示如此定義的全壓在接觸不連續的地方是連續的

雖然所使用的三種方法都得到幾乎相同的數值結果，但是 Lax-Wendroff 和 Maccormack 不論所選擇的人工黏滯係數大小均會在不連續區引起數值的振盪，尤其是在震波區速度的震盪較

為明顯，無法用添加黏滯項來克服。選擇太大的人工黏滯係數也可能導致數值計算發散，而且所選擇的 CFL 必須小才能得到穩定解。黏滯係數的大小亦可由附近幾點壓力大小的比值來決定，如 JST scheme [15] [16]。但本研究的 MHD 方程式，有壓力項及磁場的耦合。壓力在震波處也是不連續，所以計算出來的數值黏滯係數亦是不連續。此問題若單純以差分數學方法來解不容易得到無數值震盪的解，在 [13] 的論文中也無法得到收斂的解。其中 MacCormack 比 Lax-Wendroff 計算上較穩定，但整體評估上此兩種方法雖然比較簡單，計算時間短但在精確度上不適合用在有不連續震波的黎曼問題。Roe 的方法就是考慮各種波的傳遞在控制體積介面上相加，並取得各項性質的平均值如此可減少不連續區數值振盪的問題。Roe 的方法雖然在導公式及程式設計上比較複雜，但所得到的結果在不連續區均沒有數值振盪的現象發生，也可使用較大的 CFL 仍然得到穩定數值解。也證明此一方法是適用於磁流體的李曼問題。在此的計算 Roe scheme 無論時間或空間都只是一階精確度，可以看到不連續區如震波都延續很多個格點。

為了增加精確度，使用前述 MUSCL Scheme 及 4 stages Runge Kutta method 的配合再計算一次，所得的結果與一階精確度的結果來比較，結果呈現在圖 6 到圖 11。可以觀察到二階精確度的計算在不連續區有良好的解析度，也解析出幾乎直線的不連續現象，模糊擴散的情形(smearing effect)大幅降低。以上計算所得的結果均與 [17] 計算的結果比較，幾乎得到相同的結果。

## 伍、結論

本研究通過理論分析和數值計算，推導了平行板電極固體推進劑 PPT 的一維磁流體流場 (MHD) 模式。本研究對此 MHD 方程式組應用於震波管所形成的李曼問題(Riemann problem) 採取三種數值方法求出數值解並做比較。三種方法雖然都得到相同的數值解，但是 Lax-Wendroff 和 MacCormack methods 不論所選擇的人工黏滯係數大小均無法解決在不連續區數值振盪的問題。Roe's Riemann solver 雖然過程比較複雜，但其解可以避免不連續區數值振盪的問題。本研究也採用高精密度的方法解析不連續區域變數的變化。在磁流體力場中，壓力在接觸不連續的地方因為受到磁場的影響也呈現不連續的情況，必須定義一全壓包括磁場效應如此定義的全壓跨過接觸不連續的是連續分布的。

## 參考文獻

- [1] R. L. Burton and P. J. Turchi, Pulsed plasma thruster, *Journal of Propulsion and Power*, vol. 14(5), p. 716-735, 1998.
- [2] Molina-Cabrera, P.; Herdrich, G; Lau, M.; Fausolas, S.; Schoenherr, T.; Komurasaki, K.; Pulsed plasma thrusters: A worldwide review and long yearned classification, in *32nd International Electric Propulsion Conference (IEPC-2011)*, 2011.
- [3] R. E. J. Peterkin, A. J. Giancola, M. H. Frese and J. Buff, MACHZ: A reference manual-fourth edition, *Mission Research Corporation*, 1989.
- [4] R. J. LeVeque, Finite-volume methods for hyperbolic problems, *Finite-Volume Methods for*

*Hyperbolic Problems*, 2001.

- [5] P. Wesseling, Principles of computational fluid dynamics, *Springer-Verlag*, 2001.
- [6] E. F. Toro, Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, *Springer-Verlag*, 1999.
- [7] R. W. MacCormack, A conservation form method for magneto-fluid dynamics, in *AIAA-2001-0195*, 2001.
- [8] T. Pulliam, Artificial dissipation models for the euler equations, *AIAA*, vol. 24, p. 1931-1940, 1986.
- [9] L. P. Roe, Approximate riemann solvers, parameter vectors and difference schemes, *Journal of Computational Physics*, vol. 43, p. 357-372, 1981.
- [10] B. van Leer, Towards the ultimate conservative difference scheme, V. A Second Order Sequel to Godunov's Method, *J. Com. Phys*, vol. 32, p. 101-136, 1979.
- [11] G. Van Albada, B. Van Leer and W. Roberts, A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics, *Astronomy and Astrophysics*, vol. 108, p. 76-84, 1982.
- [12] S. Harada, J. Augustinus, K. Hoffm and R. Agarwal, Development of a modified runge-kutta scheme with TVD limiters for the ideal 1-D MHD equations, in *13th Computational Fluid Dynamics Conference*, Snowmass Village, CO, U.S.A., 1997.
- [13] M. Brio and C. Wu, An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, vol. 75, p. 400-422, 1988.
- [14] A. G. Sod, A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, vol. 27, p. 1-31, 1978.
- [15] A. Jameson, Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics II: Artificial diffusion and discrete shock structure, *Inter. J. comput. fluid dynamics*, vol. 5, p. 1-38, 1995.
- [16] A. Jameson, Analysis and design of numerical schemes for gas dynamics I: Artificial diffusion, upwind biasing, limiters and their effect on accuracy and multigrid convergence, *Inter. J. Comput. Fluid Dynamics*, vol. 4, p. 171-218, 1998.
- [17] W. Dai and P. R. Woodward, An approximate riemann solver for ideal magnetohydrodynamics, *Journal of Computational Physics*, vol. 111, no. 2, p. 354-372, 1994.

## 7. Figures

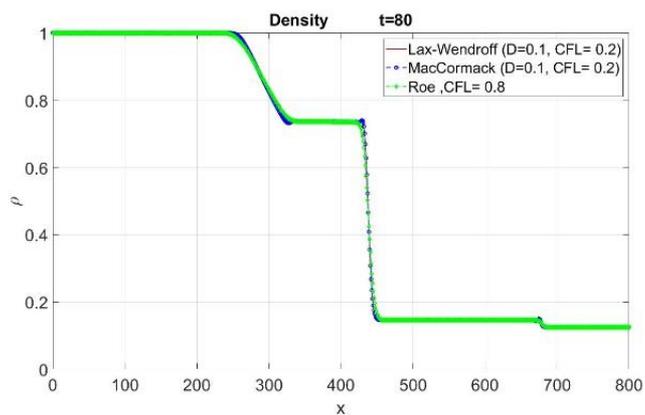


圖 1 密度分布

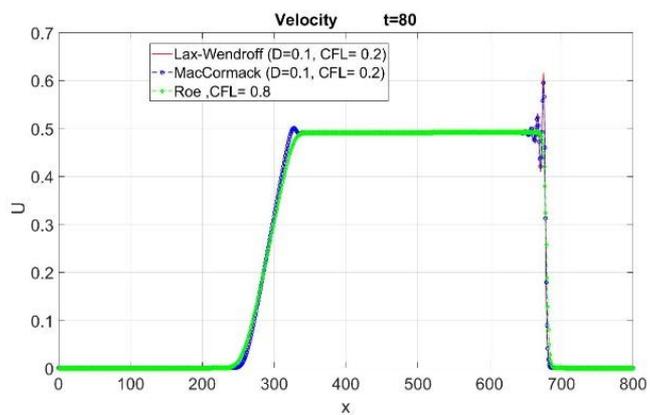


圖 2 速度分布

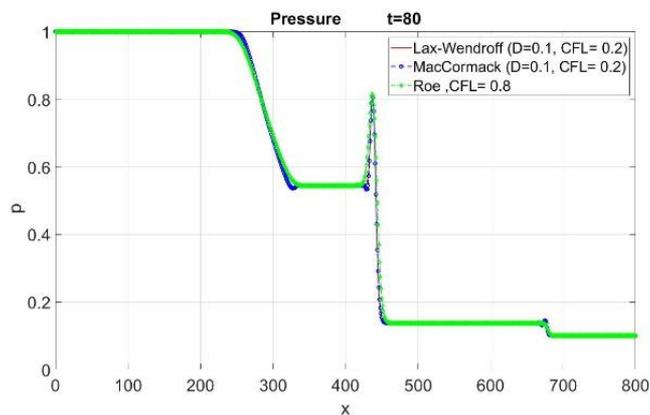


圖 3 壓力分布

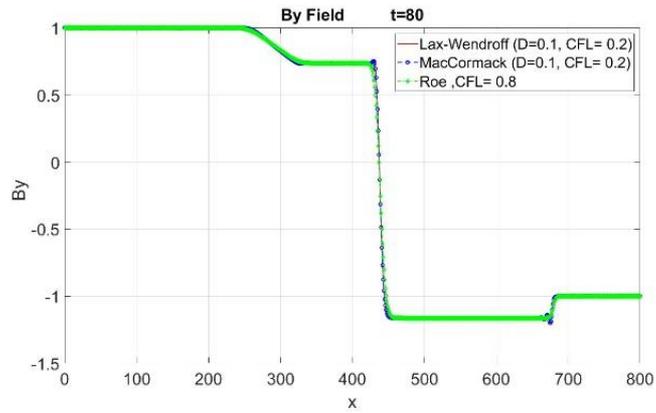


圖 4 磁場強度分布

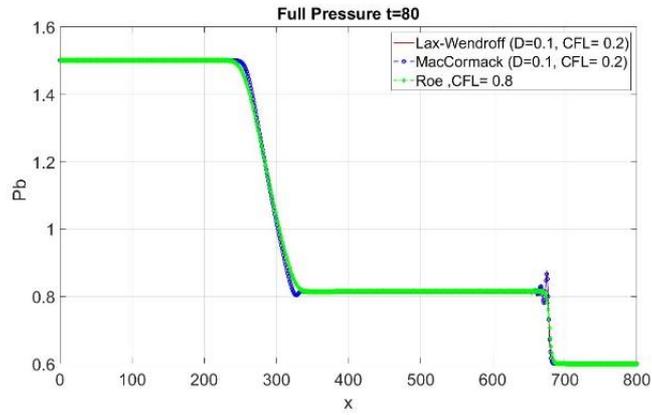


圖 5 全壓力分布

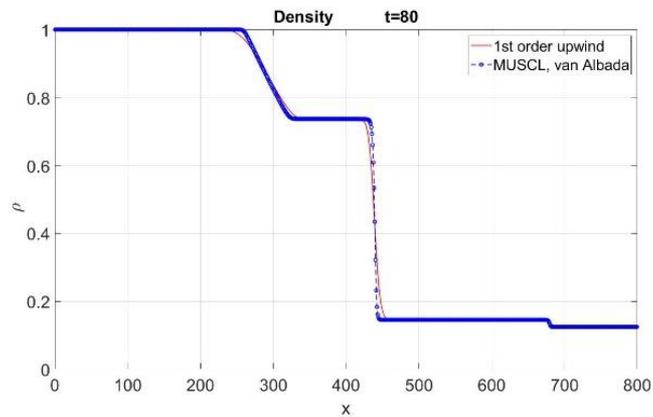


圖 6 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，密度分布的比較

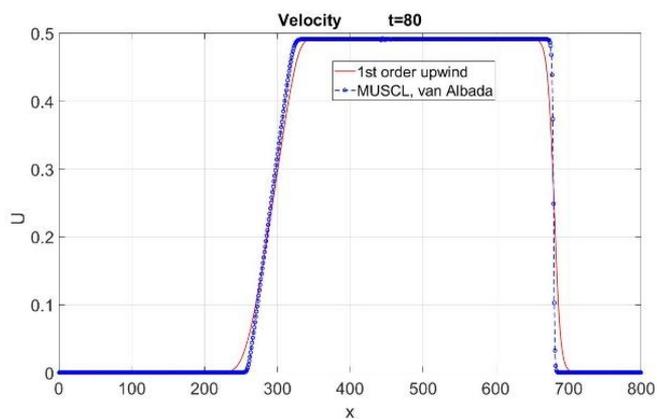


圖 7 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，速度分布的比較

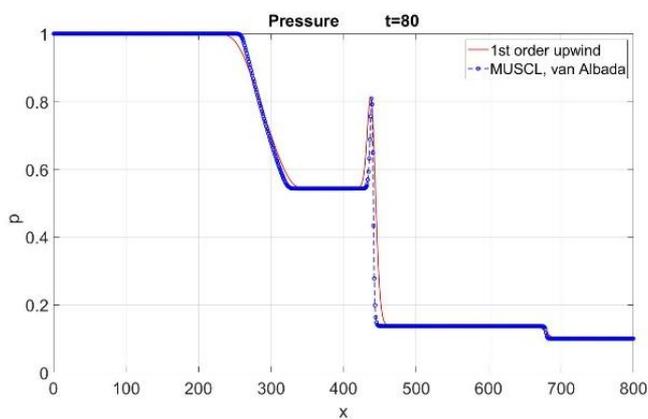


圖 8 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，壓力分布的比較

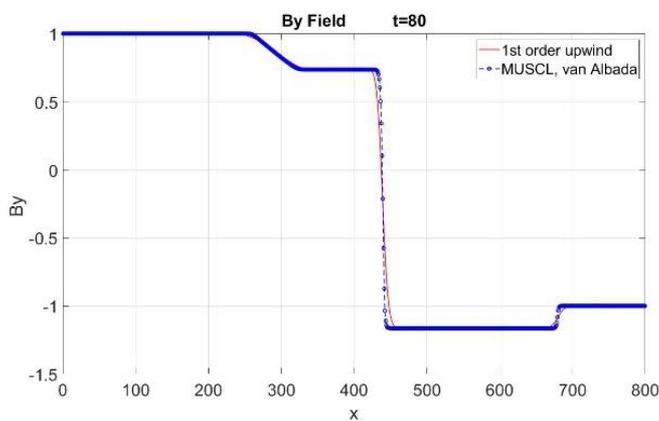


圖 9 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，磁場強度分布的比較

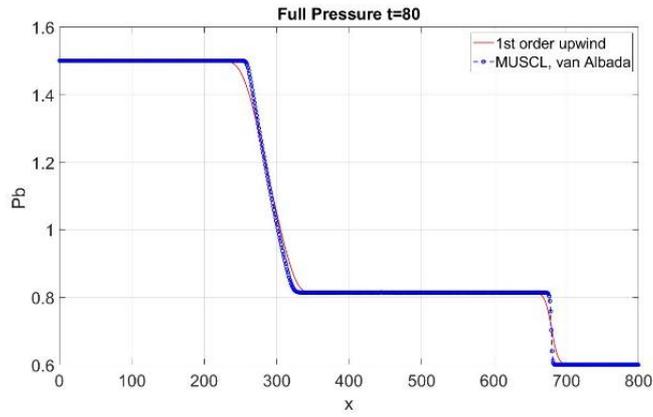


圖 10 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，磁場強度分布的比較

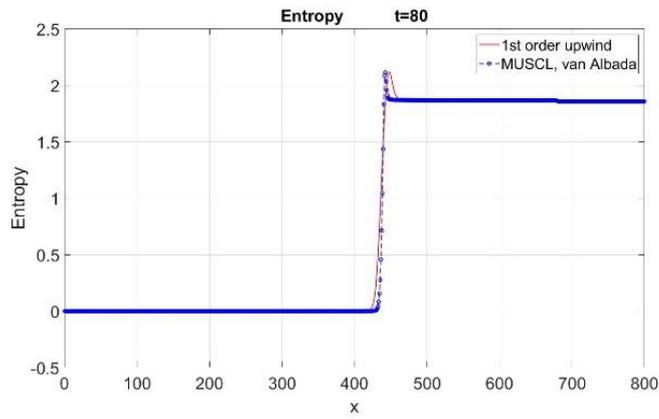


圖 11 使用 Roe's scheme 不同精確度的計算，熵分布的比較